فرآیندهای تصادفی
زمزگ-رده‌بندی حالت‌ها و توزیع حدی

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

دسترس‌پذیری

حالت j از حالت i دسترس‌پذیر است اگر $P_{ij}^{n} > 0$ به ازای چند $n \geq 0$

- به عبارت دیگر، به معنای فرایند با شروع از i امکان رفتن به حالت j

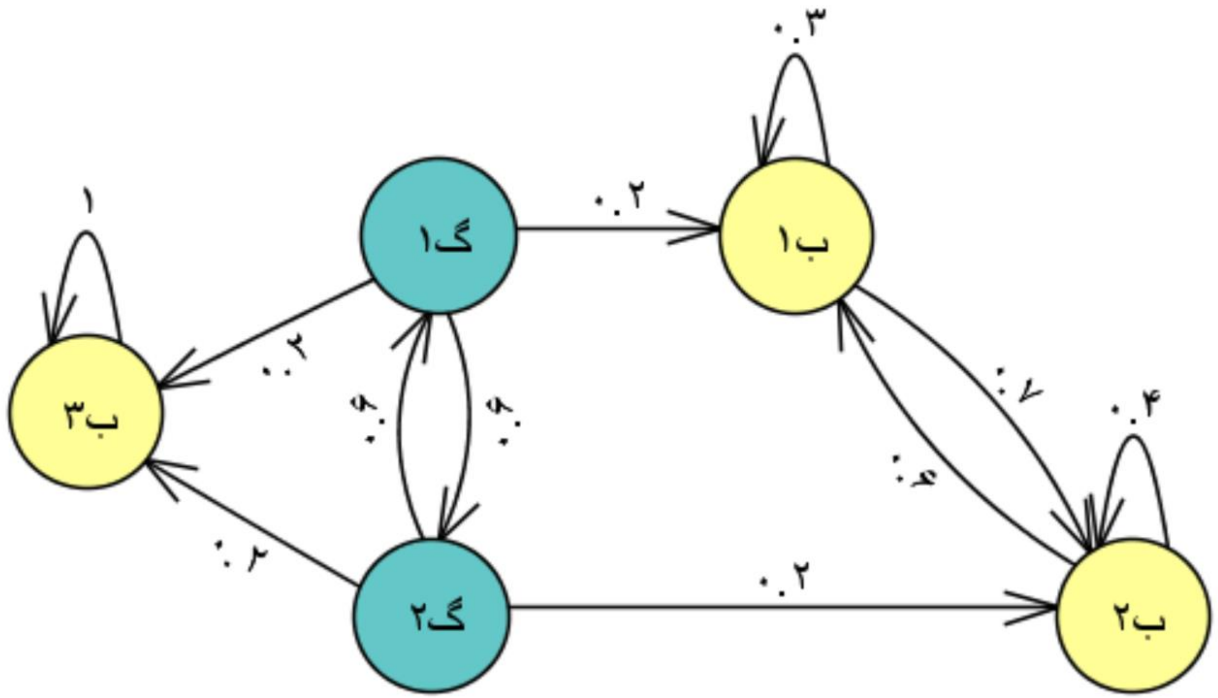
$P_{ii}^{n} = 1$

- حالت **i** دسترس‌پذیر از خودش

تمامی حالت‌ها دسترس‌پذیر از گ۱ یا گ۲

صرفا ب۱ و ب۲ دسترس‌پذیر به ب۱ و ب۲

ب۳ تنها دسترس‌پذیر به خودش



ارتباط

حالت i و j ارتباط دارند $i \leftrightarrow j$ اگر

- j دسترس‌پذیر از i
- i دسترس‌پذیر j

- هر حالتی با خود در ارتباط است

$$P_{ii}^{0} = P\{X_0 = i | X_0 = i\} = 1$$

ویژگی‌های ارتباط

بازتابی

- هر حالت i با خود در ارتباط است $i \leftrightarrow i$

تقارن

- اگر $j \leftrightarrow i$، آن‌گاه $i \leftrightarrow j$

ترایایی

- اگر $j \leftrightarrow i$ و $k \leftrightarrow j$، آن‌گاه $i \leftrightarrow k$

خواص بازتابی و تقارن نتیجه مستقیم از تعریف ارتباط

جهت اثبات ترایایی

$$i \leftrightarrow j: P_{ij}^{n} > 0, j \leftrightarrow k: P_{jk}^{m} > 0 \Rightarrow P_{ik}^{m+n} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{ir}^{n} P_{rk}^{m}, \geq P_{ij}^{n} P_{jk}^{m} > 0$$

طبقه (رده) و کاهش‌ناپذیری

دو حالت در ارتباط در یک رده قرار دارند.

طبق سه ویژگی ارتباط

- نشان‌گر دو طبقه در واقع یا یکی هستند یا جدا

به دیگر سخن مفهوم ارتباط تقسیم کنندۀ فضای حالت به دسته‌های جدا از یکدیگر

کاهش‌ناپذیری

- اگر زنجیره مارکوف صرفا دارای یک طبقه
- به دیگر سخن، تمامی حالت‌ها دو به دو در ارتباط با یکدیگر

مثال

کاهش‌ناپذیر؟

- $0 \rightarrow ۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱ \rightarrow 0$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ 0 & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

مثال

زنجیره مارکوف با چهار حالت ۰,۱,۲,۳ و ماتریس احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

رده‌ها؟

- سه رده
  - {0,۱}
  - {۲}
  - {۳}
- توضیح
  - 0 یا ۱ از ۲ دسترس‌پذیر ولی برعکس برقرار نیست
  - حالت۳ حالت جذب‌کننده

حالت‌های گذرا و بازگشتی

حالت‌ها در زنجیره مارکوف

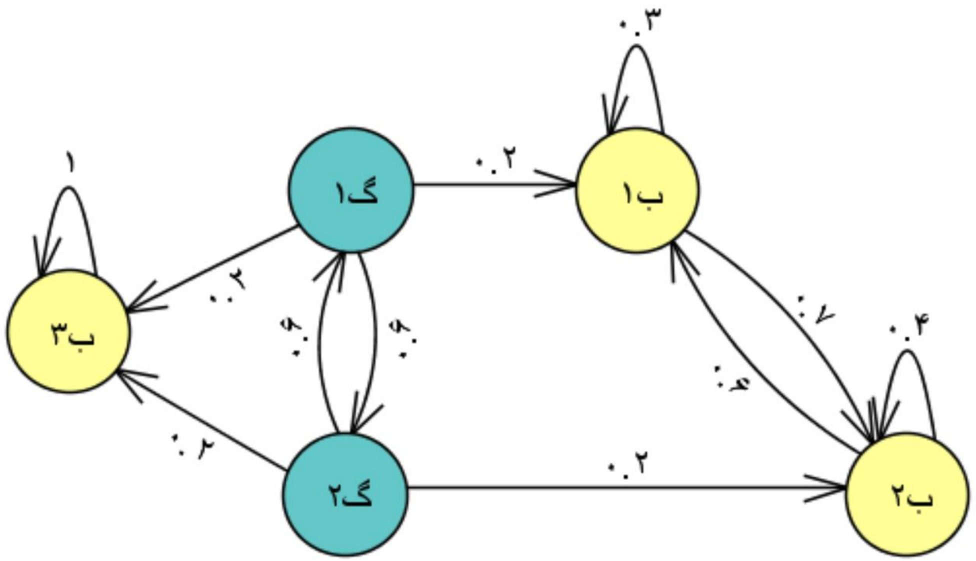
- یا بازگشتی یا گذرا

حالت گذرا

- ممکن است در بدو ملاقات شود
- ولی نهایتا متوقف شدن ملاقات‌ها
- اگر **i** گذرا، تقریبا با اطمینان $X_n \neq i$ برای **n**-های بزرگ

حالت بازگشتی

- ملاقات همیشگی
- برای مقدار $n \geq \mathrm{m}$ تقریبا با اطمینان $X_n = i$



حالت‌های گذرا و بازگشتی

f_i احتمال با شروع از i زنجیره به i برگردد

i حالت بازگشتی

- $f_i = ۱$
- بازگشت دوباره و دوبارهٔ فرایند به i
- «معمولاً» بی‌نهایت بار

i حالت گذرا

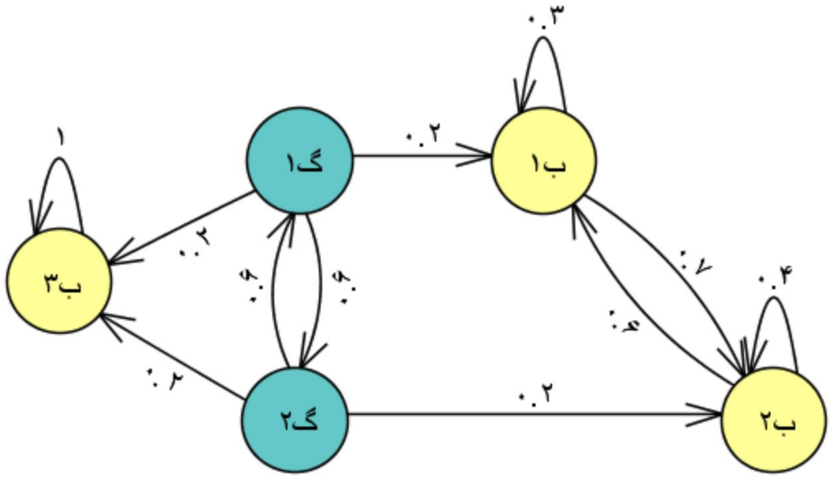
- $f_i < ۱$
- عدم برگشت به i با احتمال بزرگتر از 0 $۱ - f_i >$

حالت‌های گذرا و بازگشتی

f_i احتمال با شروع از i زنجیره به i برگردد

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} X_n = i | X_0 = i\right) = P\left(\bigcup_{n=m+۱}^{\infty} X_n = i | X_m = i\right)$$

مثال حالت بازگشتی



ب۳ بازگشتی زیرا حالت مانا (جذب‌کننده) است $P(X_1 = b۳|X_0 = b۳) = ۱$

ب۱ بازگشتی زیرا

$$P(X_۱ = b۱|X_0 = b۱) = ۰.۳$$

$$P(X_۲ = b۱, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times ۰.۶$$

$$P(X_۳ = b۱, X_۲ \neq b۱, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times ۰.۴ \times ۰.۶$$

$$\vdots$$

$$P(X_n = b۱, X_{n-۱} \neq b۱, \dots, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۷ \times (۰.۴)^{n-۲} \times ۰.۶$$

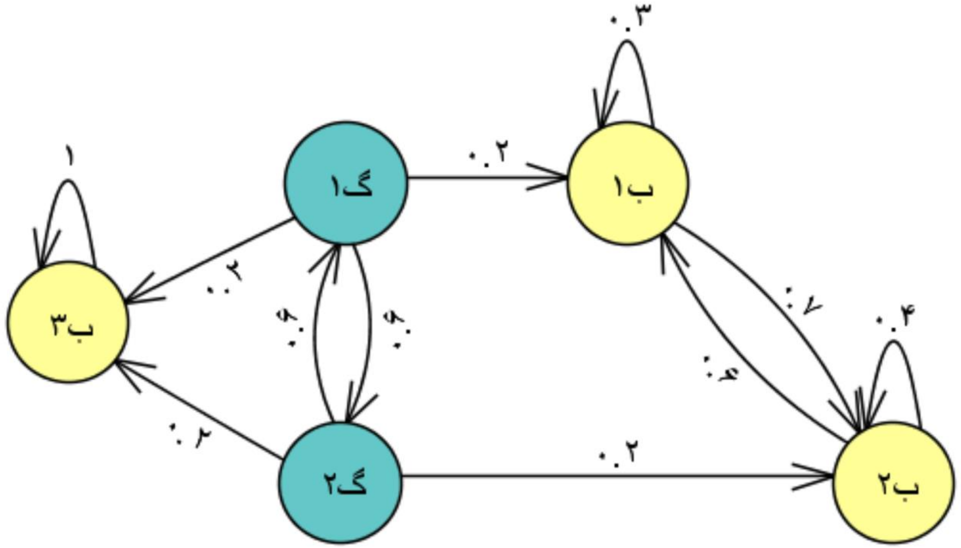
سخن کوتاه

$$f_i = \sum_{n=۱}^{\infty} P(X_n = b۱, X_{n-۱} \neq b۱, \dots, X_۱ \neq b۱|X_0 = b۱) = ۰.۳ + ۰.۷\left(\sum_{n=۲}^{\infty}(۰.۴)^{n-۲}\right)۰.۶$$

$$۰.۳ + ۰.۷\left(\frac{۱}{۱ - ۰.۴}\right)۰.۶ = ۱$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{۱}{۱ - x}$$

مثال حالت گذرا



گ۱ و گ۲ گذرا

احتمال بازگشت به گ۱

$$f_{\text{گ}۱} = (۰.۶)^۲$$

- احتمال بازگشت اگر به گ۲ برود
- صرفا بازگشت از گ۲ به گ۱

ایضا گ۲

$$f_{\text{گ}۲} = (۰.۶)^۲$$

توزیع هندسی

n آزمایش

- با دو حالت شکست و پیروزی در هر آزمایش
- احتمال پیروزی p احتمال شکست q
  - $p+q=۱$

احتمال پیروزی در آزمایش n-اُم (شکست $n-۱$ مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$\mathrm{g}(n;p)=(۱-p)^{n-۱}p$$

- میانگین

$$\mu=\frac{۱}{p}$$

توزیع هندسی

n آزمایش

- با دو حالت شکست و پیروزی در هر آزمایش
- احتمال پیروزی p احتمال شکست q
  - $p + q = ۱$

احتمال پیروزی در آزمایش n-اُم (شکست $n - ۱$ مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(n; p) = (۱ - p)^{n-۱} p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱}{p}$$

احتمال پیروزی در آزمایش $n + ۱$-اُم (شکست n مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(n; p) = (۱ - p)^{n} p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱ - p}{p}$$

امید تعداد ملاقات حالت‌ها

$$\mathbb{I}_n = \begin{cases} ۱: & X_n = i | X_0 = i \\ 0: & X_n \neq i | X_0 = i \end{cases}$$

N_i تعداد ملاقات‌های حالت i با داشتن $X_0 = i$

$$N_i = \sum_{n=۱}^{\infty} \mathbb{I}_n \{X_n = i | X_0 = i\}$$

اگر $X_n = i$

- احتمال n بار ملاقات حالت i
- آخرین ملاقات i با احتمال $۱ - f_i$
- N ملاقات ×بدون ملاقات بیشتر
- $P(N_i = n) = {f_i}^n(۱ - f_i)$

تعداد موردانتظار ملاقات

$$E[N_i] + ۱ = \frac{۱}{۱ - f_i} \Rightarrow E[N_i] = \frac{f_i}{۱ - f_i}$$

حالت **بازگشتی** $N_i = \infty$ و در نتیجه $E[N_i] = \infty$

نوع دیگر ویژگی بازگشتی/گذرا

روش دیگر نوشتن امید

$$E[N_i] = \sum_{n=۱}^{\infty} E[\mathbb{I}\{X_n = i | X_0 = i\}] = \sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n$$

- منجر به اثبات قضیهٔ زیر

قضیه

- حالت i گذرا
  - اگر و فقط اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$
- حالت i بازگشتی
  - اگر و فقط اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$

- تعداد برگشت‌های بعدی به حالت‌های گذرا متناهی است
- اگر تعداد حالت‌ها متناهی، آن‌گاه بعضی حالت‌ها بازگشتی

خواص رده‌ای

اگر i بازگشتی و $i \leftrightarrow j$، آن‌گاه j نیز بازگشتی است

- اثبات
- اگر j بازگشتی باشد، آنگاه بر اساس قضیهٔ قبلی i نیز بازگشتی خواهد بود. یا:
- $i \leftrightarrow j: \exists k, m: P_{ij}^{k} > 0, P_{ji}^{m} > 0 \Longrightarrow \forall n:\ P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} P_{ij}^{k} > 0$
- $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} \geq P_{ji}^{m} P_{ii}^{n} \sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^{n} = \infty$

بازگشتی بودن بین اعضای یک ردهٔ ارتباطی ویژگی مشترک است

- خاصیت رده‌ای

به طریق اولی، گذرا نیز خاصیت رده‌ای

حالت‌های زنجیره مارکوف به دو ردهٔ گذرا و بازگشتی تقسیم شده‌اند

زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر

کاهش‌ناپذیری

- اگر زنجیره دارای یک رده باشد
- تمامی حالت‌ها با یکدیگر ارتباط دارند
- اگر زم کاهش‌ناپذیر و دارای تعداد متناهی از حالت‌ها
  - آن‌گاه تک رده بازگشتی است
- اگر زم دارای نامتناهی حالت باشد
  - امکان گذرا بودن کلاس

کاهش‌پذیر

- وقتی چندین رده دارد
  - رده‌های حالات گذرا
  - رده‌های حالات بازگشتی

زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر

در صورت آغاز به کار در رده بازگشتی

- باقی ماندن در همان رده

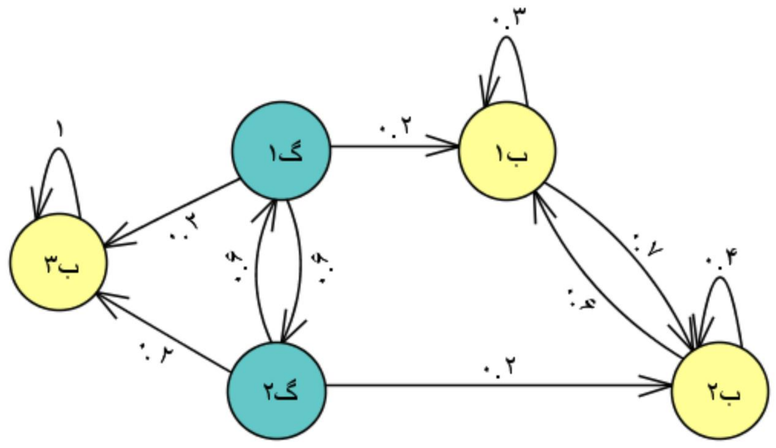
در صورت آغاز به کار در ردهٔ گذرا، آن‌گاه امکان

- ماندن در همان رده
- رفتن به رده گذرای دیگر
- رفتن به ردهٔ بازگشتی

برای زمان‌های طولانی

- زنجیره محدود به تک رده
  - امکان تقسیم‌بندی به مولفه‌های کاهش‌ناپذیر

مثال رده‌های ارتباطی



سه رده

رده حالت‌های گذار: گ۱ و گ۲

رده حالت‌های بازگشتی: ب۱ و ب۲

رده حالت بازگشتی: ب۳

برای n-های بزرگ

- کافی بودن مطالعه مولفه‌های کاهش‌ناپذیر ب۱ و ب۲

مثال

زنجیره مارکوف با چهار حالت $0,۱,۲,۳$ و ماتریس احتمال انتقال

حالت‌های گذرا و بازگشتی کدامند؟

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \rightarrow ۱ \rightarrow ۳ \rightarrow 0 \rightarrow ۱ \rightarrow ۲ \rightarrow 0$$

- پس همه با هم در ارتباط
- چون زنجیره متناهی پس تمامی حالت‌ها لزوما بازگشتی

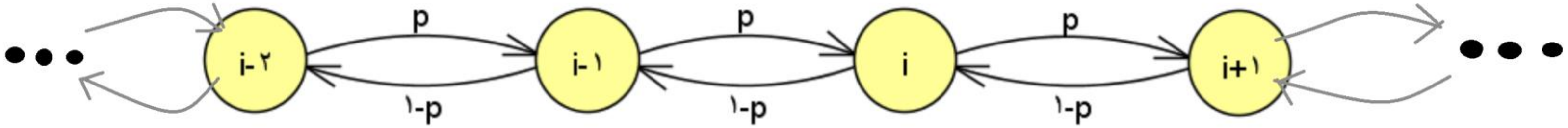
مثال

زنجیره مارکوف با پنج حالت ۰,۱,۲,۳,۴ و ماتریس احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حالت بازگشت؟

- دارای رده‌های
  - {۰,۱}
    - بازگشتی
  - {۲,۳}
    - بازگشتی
  - {۴}
    - گذرا



مثال- افتان و خیزان می‌روی

قدم به راست با احتمال $0 < p < ۱$

- قدم به چپ با احتمال $۱ - p$
- راه مستقیم نمی‌تواند

- ارتباط حالت‌ها؟
  - همگی در ارتباط با یکدیگر
- نتیجه
  - زنجیره مارکوفی کاهش‌ناپذیر
  - به دیگر سخن، صرفا یک رده
- نیاز به مشخص کردن اینکه
  - رده گذراست یا بازگشتی
  - پس بررسی حالت 0 جهت
    - معین کردن متناهی یا بی‌نهایت بودن $\sum_{n=۱}^{\infty} P_{ii}^{n}$

حالت‌ها $\mathrm{i} = 0, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$

- تعداد نامتناهی از حالت‌ها
- احتمال‌های انتقال
  - $P_{i,i+۱} = p = ۱ - P_{i,i-۱}$

توزیع دوجمله‌ای

امتحان‌های تکراری

احتمال تمام پیروزی‌ها برابر با θ

هر پرتاب (آزمایش) مستقل از دیگر آزمایش‌ها

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, \theta)$

$0 \leq \theta \leq ۱$

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}, \qquad x = 0, ۱, \ldots, n$$

مثال- ولگشت

$$P_{00}^{۲n-۱} = 0, n = ۱,۲,\ldots$$

- چرا؟ استفاده از مدل شرطبندی
- به خانه صفر برگشتن اگر و فقط اگر n برد و n باخت
  - برگشت به 0 با $۲n$ گام
    - n گام راست و n گام به چپ
  - احتمال برد p
  - احتمال باخت 1-p
- توزیع احتمالی؟
  - دوجمله‌ای

$$P_{00}^{۲n} = \binom{۲n}{n} p^n q^n = \frac{(۲n)!}{n!\,n!} p^n q^n = \frac{(۲n)!}{n!\,n!} [p(۱-p)]^n, n = ۱,۲,\ldots$$

  - استفاده از تقریب استرلینگ

$$n! \cong \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^{n+\frac{۱}{۲}} e^{-n}\sqrt{۲\pi}$$

$$\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n)^{۲n+\frac{۱}{۲}} e^{-۲n}\sqrt{۲\pi}}{n^{۲n+۱} e^{-۲n} ۲\pi} = \frac{۲^{۲n}}{\sqrt{n\pi}} \Longrightarrow P_{00}^{۲n} \sim \frac{[۴p(۱-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

مثال- ولگشت

$$\binom{۲n}{n}=\frac{(۲n)^{۲n+\frac{۱}{۲}}e^{-۲n}\sqrt{۲\pi}}{n^{۲n+۱}e^{-۲n}۲\pi}=\frac{۲^{۲n}}{\sqrt{n\pi}}\Longrightarrow P_{00}^{۲n}\sim\frac{[۴p(۱-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}P_{00}^{۲n}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[۴p(۱-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$$

- اگر $p=\frac{۱}{۲}$ آن‌گاه $۴p(۱-p)=۱$

$$\sum_{n=۱}^{\infty}P_{00}^{۲n}\begin{cases}=\infty, p=\frac{۱}{۲}\\<\infty, p\neq\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

- $p=\frac{۱}{۲}$ گام تصادفی متقارن
- در بیشتر از یک بعد
  - دوبعد

مثال- ولگشت دوبعدی

- در بیشتر از یک بعد
  - دوبعدی

$$P_{(i,j),(i+۱,j)} = P_{(i,j),(i-۱,j)} = P_{(i,j),(i,j+۱)} = P_{(i,j),(i,j-۱)} = \frac{۱}{۴}$$

  - کاهش‌ناپذیر؟
  - پس همگی بازگشتی در صورتی که $\mathbf{0} = (0,0)$ بازگشتی
  - $P^{۲n}_{\mathbf{00}}$
    - در **2n** قدم برگشت به مبدا در صورتی که به ازای $0 \leq i \leq n$
      - **i** قدم به چپ، **i** قدم به راست، **n-i** قدم به بالا و **n-i** قدم به پائین
      - هر قدم با احتمال $\frac{۱}{۴}$
      - نوع توزیع؟
      - چندجمله‌ای

$$P^{۲n}_{\mathbf{00}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(۲n)!}{i!\,i!\,(n-i)!\,(n-i)!}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(۲n)!}{n!\,n!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n}$$

$$= \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n}\binom{۲n}{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n}\binom{۲n}{n}\binom{۲n}{n}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

مثال- ول‌گشت دوبعدی

$$P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲n} \binom{۲n}{n}\binom{۲n}{n}$$

$$\binom{۲n}{n} \xRightarrow{\text{استرلینگ}} \binom{۲n}{n} \sim \frac{۴^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \frac{۱}{\pi n} \Rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} P_{\mathbf{00}}^{۲n} = \infty$$

- پس تمامی حالت‌ها بازگشتی

حالت‌های گذرا و بازگشتی

f_i احتمال با شروع از **i** زنجیره به **i** برگردد

$$f_i = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = i | X_0 = i\right) = P\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} X_n = i | X_m = i\right)$$

قضیه

اگر i بازگشتی و $i \leftrightarrow j$ و f_{ij} احتمال اینکه زنجیره مارکوف با شروع از **i** به حالت **j** منتقل شود

$$f_{ij} = P(X_n = j | X_0 = i)$$

آنگاه $f_{ij} = ۱$.

اثبات- $i \leftrightarrow j: \exists n: P_{ij}^n > 0$

$$X_0 = i$$

در اولین فرصت با احتمال $P_{ij}^n > 0$

- در صورتی که وارد نشود محتملا پس از **n** باز به **i** برمی‌گردد؟ حتما به دلیل بازگشتی بودن
  - باز فرصت با احتمال $P_{ij}^n > 0$
  - ادامه تحلیل
  - توزیع هندسی با ضرائب P_{ij}^n

$$(۱ - P_{ij}^n)^{k-۱} P_{ij}^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{۱}{۱ - x} \Longrightarrow f_{ij} = \sum_{k=۱}^{\infty} \left(۱ - P_{ij}^n\right)^{k-۱} P_{ij}^n = \frac{۱}{۱ - \left(۱ - P_{ij}^n\right)} P_{ij}^n = ۱$$

امید تعداد انتقال‌های برگشت به حالت

حالت بازگشتی

- برگشت به حالت با احتمال ۱

زمان بازگشت به حالت j با شروع از j

$$N_j = \min\{n > 0 : X_n = j | X_0 = j\}$$

m_j امید تعداد انتقال‌هائی که زم با شروع از j به j برگردد (یا امید زمان بازگشت)

$$m_j = E\left[N_j \middle| X_0 = j\right]$$

$$= \sum_{n=۱}^{\infty} nP\left(N_j = n \middle| X_0 = j\right)$$

به دیگر سخن میانگین تعداد قدم‌های لازم برای بازگشت به j با شروع از j

بازگشت مثبت و بازگشت پوچ

فرض حالت بازگشتی

تعریف - «بازگشت مثبت» حالت i

- N_j دارای امید ریاضی متناهی

$$m_j = E[N_j | X_0 = j] = \sum_{n=۱}^{\infty} nP(N_j = n | X_0 = j) < \infty$$

تعریف - «بازگشت پوچ» حالت i

- حالت i بازگشتی اما N_j دارای امید ریاضی نامتناهی

$$m_j = E[N_j | X_0 = j] = \sum_{n=۱}^{\infty} nP(N_j = n | X_0 = j) = \infty$$

قضیه

- m_j امید تعداد انتقال‌هائی که زم با شروع از j به j برگردد
- π_j نسبت بلندمدت زمانی که زنجیره در حالت j خواهد بود

قضیه

اگر زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر و بازگشتی باشد برای هر حالت آغازی

$$\pi_j = \frac{۱}{m_j}$$

اثبات-

- $T_۱$ تعداد انتقال‌هائی که با شروع از i به j می‌رسد
- $T_۲$ تعداد انتقال‌هائی اضافی بعد $T_۱$ که باز به j می‌رسد
- $T_۳$ تعداد انتقال‌هائی اضافی بعد $T_۱ + T_۲$ که باز به j می‌رسد
- T_n تعداد انتقال‌هائی اضافی بین n-1-اُمین و n-اُمین انتقال‌ها به j می‌رسد
- با استفاده از خاصیت مارکوفی $T_۲, T_۳, \dots$ دارای توزیع یکسان و مستقل با میانگین m_j هستند

قضیه

چون n-اُمین انتقال به j در زمانی $T_۱ + T_n$

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=۱}^{n} T_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} T_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{\frac{T_۱}{n} + \frac{T_۲ + \cdots + T_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{m_j}$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{T_۱}{n} = 0$
- قانون قوی اعداد بزرگ $\lim_{n\to\infty} \frac{T_۲+\cdots+T_n}{n} = \frac{T_۲+\cdots+T_n}{n-۱}\frac{n-۱}{n} = m_j$

نتایج چون $m_j < \infty$ متناظر با $\frac{۱}{m_j} > 0$

- j بازگشتی مثبت اگر و فقط اگر $\pi_j > 0$
- استفاده در اثبات «بازگشتی مثبت» به مثابهٔ خاصیتی رده‌ای

قضیه

اگر i بازگشتی مثبت و $j \leftrightarrow i$، آن‌گاه j بازگشتی مثبت است.

اثبات-

- احتمال $P_{ij}^{n} > 0$
- π_i نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت i
- $\pi_i P_{ij}^{n}$ نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت i و سپس پس از n انتقال به j منتقل شود
  - به دیگر سخن، نسبت بلندمدت زمان بودن زنجیره در حالت j و n انتقال پیش در حالت i بود!؟≥نسبت بلندمدت زمان ماندن زنجیره در حالت j

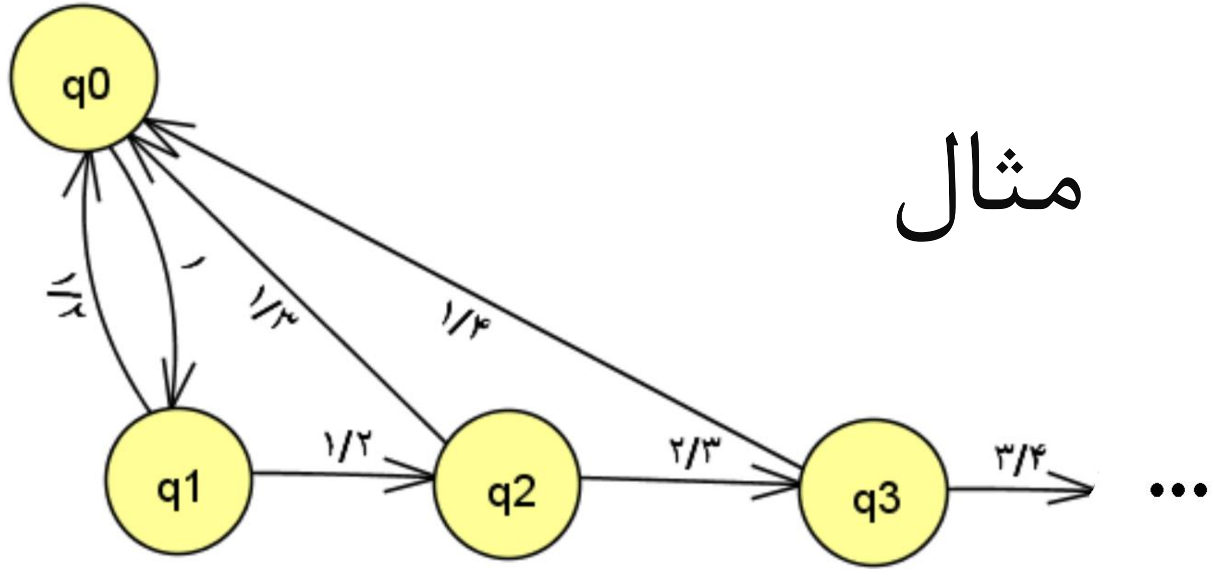
$$\pi_j \geq \pi_i P_{ij}^{n} > 0$$

حکم برقرار است.

نتایج

- بازگشتی پوچ نیز خاصیتی رده‌ای است
- زنجیره مارکوف متناهی کاهش‌ناپذیر لاجرم بازگشتی مثبت است. چرا؟
- مثال معروف بازگشتی پوچ
  - ولگشت تک بعدی متقارن. چرا؟

مثال



$$P(N_0 = ۲|X_0 = 0) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(N_0 = ۳|X_0 = 0) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}$$

$$P(N_0 = ۳|X_0 = 0) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴}$$

$$\vdots$$

$$P(N_0 = n|X_0 = 0) = \frac{۱}{n-۱} \times \frac{۱}{n}$$

حالت 0 بازگشتی زیرا احتمال عدم برگشت برابر 0

$$P(N_0 = \infty|X_0 = 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{(n-۱)\times n} \to 0$$

حالت 0 بازگشتی تهی زیرا امید ریاضی برگشت برابر بی‌نهایت

$$E(N_0 = n|X_0 = 0) = \sum_{n=۱}^{\infty} nP(N_0 = n|X_0 = i) = \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(n-۱)} = \infty$$

نسبت بلندمدت زنجیره مارکوفی کاهش‌ناپذیر و بازگشتی مثبت

قضیه

- زنجیره مارکوف کاهش‌ناپذیر و بازگشتی مثبت باشد. آن‌گاه نسبت‌های بلندمدت پاسخ منحصر به فرد معادلات زیر هستند

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = ۱$$

در صورت بدون پاسخ بودن معادلات فوق، آن‌گاه زنجیره مارکوف یا گذراست یا بازگشتی پوچ است و تمامی $\pi_j = 0$.

مثال- پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

- صرفا وابسته شرایط جوی امروز

حالت‌ها

- 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش
- ۱: فرایند در حالت ۱ در روز عدم بارش

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & ۱-\alpha \\ \beta & ۱-\beta \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = \alpha\pi_0 + \beta\pi_۱$
- $\pi_۱ = (۱-\alpha)\pi_0 + (۱-\beta)\pi_۱$
- $\pi_0 + \pi_۱ = ۱$

- $\pi_0 = \frac{\beta}{۱+\beta-\alpha}$
- $\pi_۱ = \frac{۱-\alpha}{۱+\beta-\alpha}$

مثال- شاد و معمولی و غمگین

- احتمال‌های انتقال
  - اگر امروز شاد آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۵ و ۰,۴ و ۰,۱
  - اگر امروز معمولی آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۳ و ۰,۴ و ۰,۳
  - اگر امروز غمگین آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۲ و ۰,۳ و ۰,۵
- X_n
  - نمایشگر حال و احوال مش سکینه
  - $\{X_n, n \geq 0\}$
- حالت‌ها
  - سه حالت یا زنجیره مارکوف سه حالتی
  - شاد یا حالت 0 و معمولی یا حالت ۱ و غمگین یا حالت ۲

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۵ & ۰.۴ & ۰.۱ \\ ۰.۳ & ۰.۴ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۳ & ۰.۵ \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = ۰.۵\pi_0 + ۰.۳\pi_۱ + ۰.۲\pi_۲$
- $\pi_۱ = ۰.۴\pi_0 + ۰.۴\pi_۱ + ۰.۳\pi_۲$
- $\pi_۲ = ۰.۱\pi_0 + ۰.۳\pi_۱ + ۰.۵\pi_۲$
- $\pi_0 + \pi_۱ + \pi_۲ = ۱$

- $\pi_0 = \frac{۲۱}{۶۲}$
- $\pi_۱ = \frac{۲۳}{۶۲}$
- $\pi_۲ = \frac{۱۸}{۶۲}$

مثال- تحلیل طبقات اجتماعی در گذر زمان

جامعه‌شناسان: طبقهٔ اجتماعی نسل‌های بعدی چون زنجیرهٔ مارکوف است.

$$P = \text{پدر} \begin{array}{r} \text{ضعیف} \\ \text{متوسط} \\ \text{بالا} \end{array} \begin{bmatrix} ۰.۴۵ & ۰.۴۸ & ۰.۰۷ \\ ۰.۰۵ & ۰.۷ & ۰.۲۵ \\ ۰.۰۱ & ۰.۵ & ۰.۴۹ \end{bmatrix}$$

- $\pi_0 = ۰.۴۵\pi_0 + ۰.۰۵\pi_۱ + ۰.۰۱\pi_۲$
- $\pi_۱ = ۰.۴۸\pi_0 + ۰.۷\pi_۱ + ۰.۲۵\pi_۲$
- $\pi_۲ = ۰.۰۱\pi_0 + ۰.۵\pi_۱ + ۰.۴۹\pi_۲$
- $\pi_0 + \pi_۱ + \pi_۲ = ۱$

- $\pi_0 = ۰.۰۷$
- $\pi_۱ = ۰.۶۲$
- $\pi_۲ = ۰.۳۱$

مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

حالت	مبلغ پرداخت بیمه	حالت بعدی			
		بدون ادعا	یک ادعا	دو ادعا	$\geq$ ۳
۱	۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲	۲۵۰	۱	۳	۴	۴
۳	۴۰	۲	۴	۴	۴
۴	۶۰۰	۳	۴	۴	۴

$$s_۲(0) = ۱$$

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر $\lambda = \frac{۱}{۲}$

- a_k احتمال k ادعا در طول یک سال
- ماتریس انتقال احتمال

$$a_k = e^{-\frac{۱}{۲}} \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^k}{k!}, k \geq 0$$

$$a_0 = ۰.۶۰۶۵$$
$$a_۱ = ۰.۳۰۳۳$$
$$a_۲ = ۰.۰۷۵۸$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} a_0 & a_۱ & a_۲ & ۱ - a_0 - a_۱ - a_۲ \\ a_0 & 0 & a_۱ & ۱ - a_0 - a_۱ \\ 0 & a_0 & 0 & ۱ - a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & ۱ - a_0 \end{bmatrix}$$

مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر λ

- a_k احتمال k ادعا در طول یک سال

$$a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

- ماتریس انتقال احتمال

$$a_0 = ۰.۶۰۶۵$$
$$a_۱ = ۰.۳۰۳۳$$
$$a_۲ = ۰.۰۷۵۸$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۶۵ & ۰.۳۰۳۳ & ۰.۰۷۵۸ & ۰.۰۱۴۴ \\ ۰.۶۰۶۵ & 0 & ۰.۳۰۳۳ & ۰.۰۹۰۲ \\ 0 & ۰.۶۰۶۵ & 0 & ۰.۳۹۳۵ \\ 0 & 0 & ۰.۶۰۶۵ & ۰.۳۹۳۵ \end{bmatrix}$$

$$\pi_۱ = ۰.۶۰۶۵\pi_۱ + ۰.۶۰۶۵\pi_۲$$
$$\pi_۲ = ۰.۳۰۳۳\pi_۱ + ۰.۶۰۶۵\pi_۳$$
$$\pi_۳ = ۰.۰۷۵۸\pi_۱ + ۰.۳۰۳۳\pi_۲ + ۰.۶۰۶۵\pi_۴$$
$$\pi_۱ + \pi_۲ + \pi_۳ + \pi_۴ = ۱$$

$$\pi_۱ = ۰.۳۶۹۲$$
$$\pi_۲ = ۰۲۳۹۵$$
$$\pi_۳ = ۰۲۱۰۳$$
$$\pi_۴ = ۰۱۸۰۹$$

$$۲۰۰\pi_۱ + ۲۵۰\pi_۲ + ۴۰۰\pi_۳ + ۶۰۰\pi_۴ = ۳۲۶.۳۷۵$$

رفتار حدی

زم دارای حافظهٔ تک گام

- فراموشی حالت آغاز در بلندمدت

رفتار زم در میل به بی‌نهایت

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

رفتار در بی‌نهایت مستقل از $X_0 = i$ و برابر مقادیر نسبت بلندمدت

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix} \quad P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۷۰ & ۰.۳۰ \\ ۰.۴۵ & ۰.۵۵ \end{bmatrix} \quad P^{۷} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۳۱ & ۰.۳۹۶۹ \\ ۰.۵۹۵۳ & ۰.۴۰۴۷ \end{bmatrix} \quad P^{۳۰} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \\ ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \end{bmatrix}$$

همگرائی ضرب ماتریسی

- برای **n**-های بزرگ، احتمال مستقل از زمان

تمام ردیف‌ها برابر

- احتمالات مستقل از وضعیت آغاز

$$\pi_0 = \frac{\beta}{۱ + \beta - \alpha} \qquad \pi_0 = ۰.۶$$

$$\pi_۱ = \frac{۱ - \alpha}{۱ + \beta - \alpha} \qquad \pi_۱ = ۰.۴$$

احتمالات حدی

تا حال هر چه دیده‌ایم

- نسبت بلند مدت اجرا برابر با توزیع حدی
- اما همیشه برقرار نیست
  - در ادامه بررسی مواردی که برقرار است و چرائی

- مثال زنجیره مارکوف دو حالتی
  - $P_{0,۱} = P_{۱,0} = ۱$
  - زنجیره مارکوف دمادم در حال انتقال بین حالت‌های 0 و ۱
  - نسبت‌های اجرای بلندمدت
    - $\pi_0 = \pi_۱ = \frac{۱}{۲}$
    - اما
      - $P_{0,0}^{n} = \begin{cases} ۱, & n \text{زوج} \\ 0, & n \text{فرد} \end{cases}$
    - پس با میل به بی‌نهایت **n**، نبود مقدار حدی برای $P_{0,0}^{n}$

تناوب

تناوب d حالت i

- بزرگترین مقسوم علیه تعداد تغییر حالت‌های مورد نیاز برگشت به حالت i

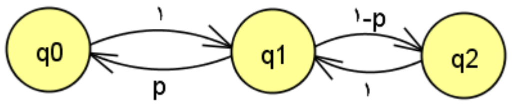
$$d = \text{بمم}\{n: P_{ii}^{n} \neq 0\}$$

شروط متناوب بودن حالت i

- $P_{ii}^{n} \neq 0$ صرفا برای n-های مضرب d
- d بزرگترین عدد با این خاصیت

احتمال مثبت برگشت به i صرفا در هر d قدم زمانی

تناوب خاصیتی رده‌ای



حالت ۱ دارای دوره تناوب ۲

- همچنین حالت‌های 0 و ۲

ولگشت تصادفی تک-بعدی دارای دوره تناوب ۲

مثال-

$$P = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۰.۵ & ۰.۵ \end{bmatrix} \qquad P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۵۰ & ۰.۵۰ \\ ۰.۲۵ & ۰.۷۵ \end{bmatrix} \qquad P^{۳} = \begin{bmatrix} ۰.۲۵۰ & ۰.۷۵۰ \\ ۰.۳۷۵ & ۰.۶۲۵ \end{bmatrix}$$

$P_{۱۱} = 0$ اما $P^{۲}_{۱۱} \neq 0$ ،$P^{۳}_{۱۱} \neq 0$

- بنابراین ب‌م‌م {۲و۳}=۱

$P_{۲۲} \neq 0$ پس حالت ۲ غیرتناوبی

- باید این‌طور باشد چرا که ۲ $\leftrightarrow$ ۱

مثال-

$P = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}$ $P^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}$ $P^{۳} = \begin{bmatrix} 0 & ۱ \\ ۱ & 0 \end{bmatrix}$

$P_{۱۱}^{۲n+۱} = 0$ اما $P_{۱۱}^{۲n} \neq 0$

- بنابراین ب‌م‌م {۲و۴}=۲
- پس حالت ۱ دارای دوره تناوب ۲
- ایضا حالت ۲ زیرا ۲ $\longleftrightarrow$ ۱

ارگودیک

ارگودیک

- حالت‌هایی دارای هر دو ویژگی «بازگشتی مثبت» و «غیرمتناوب»

زنجیره مارکوف ارگودیک

- زم کاهش‌ناپذیر با حالت‌های ارگودیک
  - پس زم ارگودیک دارای ویژگی‌های
    - کاهش‌ناپذیر
    - غیرمتناوب
    - بازگشتی مثبت

توزیع حدی زنجیره مارکوفی ارگودیک

قضیه

- زنجیره مارکوف ارگودیک (یا همان کاهش‌ناپذیر، غیرمتناوب، بازگشتی مثبت) دارای «$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}$» است. حد مذکور مستقل از حالت آغاز است. بدیگر سخن

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}$$

- هم‌چنین، احتمالات حالت پایدار $\pi_j \geq 0$ پاسخ‌های منحصربفرد نامنفی دستگاه معادلات خطی هستند. به عبارت دیگر

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = ۱$$

بنابراین در صورت پاسخ نداشتن دستگاه معادلات خطی، زنجیره مارکوفی یا گذرا یا بازگشت تهی و همهٔ $\pi_j = 0$.
استفاده از معادلات جبری آسان جهت یافتن احتمالات حالت پایدار

دقت شود که قضیه مذکور برای موارد متناوب، حالت‌های بازگشت تهی، چند رده کاربرد ندارد

روابط جبری تبیین احتمالات حدی

استفاده از احتمال کل

$$P_{kj}^{n+1} = P(X_{n+1} = j|X_0 = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_0 = k)P_{ki}^n$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}P_{ki}^n$$

اگر حد وجود داشته باشد،آن‌گاه برای **n**-های به اندازه کافی بزرگ

- $P_{kj}^{n+1} \approx \pi_j$ و $P_{ki}^n \approx \pi_i$؛ پس

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}$$

معادله دیگر به دلیل اصول کولمولگروف برقرار است

از لحاظ احتمالی⟸ حالت‌ها تغییر می‌کنند ولی احتمالات خیر!

انتخاب توزیع آغازین

- $P(X_0 = i) = \pi_i, \forall i$

احتمال در زمان ۱

$$P(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(X_1 = j | X_0 = i) \pi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij} \pi_i = \pi_j$$

- ادامه بازگشتی با شروع از $P(X_0 = i) = \pi_i$
  - عدم تغییر توزیع احتمال $P(X_n = i) = \pi_i \forall n$

نمایش ماتریسی

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\, P^n = \begin{bmatrix} \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

نمایش ماتریسی

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} P^n = \begin{bmatrix} \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_۱ & \pi_۲ & \dots & \pi_N \end{bmatrix}$$

احتمال یکسان همه ردیف‌ها

- نشان‌دهندهٔ استقلال از حالت آغاز

توزیع احتمال برای **n** بزرگ

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \boldsymbol{p}(n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} (P^n)^T \boldsymbol{p}(0) = (\pi_1, \dots, \pi_N)^T$$

استقلال از وضعیت آغازین $\boldsymbol{p}(0)$

نمایش ماتریسی- بردار ویژه

توزیع حدی (حالت پایدار)

- $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_N)^T$

توزیع حدی پاسخ منحصربفرد

$$\boldsymbol{\pi} = P^T\boldsymbol{\pi}, \qquad \boldsymbol{\pi}^T\mathbf{1} = 1$$

$\boldsymbol{\pi}$ بردار ویژه‌ای همراه مقدار ویژهٔ ۱ برای P^T

- نرمال شده جهت جمع برابر ۱

تمامی دیگر مقادیر ویژهٔ P^T دارای اندازه‌ای کوچکتر از ۱

- در غیر این‌صورت،واگرائی P^T
- اما اطلاع از اینکه P^T دارای احتمال‌های انتقال n-گامی
- بردارویژهٔ $\boldsymbol{\pi}$ همراه با بزرگترین مقدار P^T

بدست آوردن $\boldsymbol{\pi}$ چون بردار ویژه معمولا دارای محاسبات کارآمد

مثال- زنجیره مارکوف ارگودیک

$$P = \begin{bmatrix} 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \\ ۰.۱ & ۰.۵ & ۰.۴ \\ ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

P متناظر با زم ارگودیک؟

- کاهش‌ناپذیر- تمامی حالت‌ها در ارتباط با حالت ۲
- بازگشت مثبت- کاهش‌ناپذیر و متناهی
- غیرمتناوب- حالت ۲ دارای دوره تناوب ۱

بنابراین وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} (P^n)^T \boldsymbol{p}(0) = (\pi_۱, \pi_۲, \pi_۳)^T$$

مستقل از $\boldsymbol{p}(0)$

مثال- زنجیره مارکوف ارگودیک- ادامه

نحوهٔ محاسبهٔ π_j

- حل دستگاه معادلات خطی $\pi_j = \sum_{i=0}^{۳} \pi_i P_{ij}$ و $\sum_{j=0}^{۳} \pi_j = ۱$

$$\begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \\ ۰.۱ & ۰.۵ & ۰.۴ \\ ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۷ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \end{bmatrix}$$

سه متغیرهٔ چهار معادله

- بعضی از معادلات محتملا وابستهٔ خطی؟
  - در واقع جمع سه معادلهٔ اول برابر معادله آخر
- چون جمع ردیف‌های P برابر ۱
  - توجه در اینجا در ماتریس P^T قرار دادیم

$$\begin{bmatrix} \pi_۱ \\ \pi_۲ \\ \pi_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰.۰۹۰۹ \\ ۰.۲۹۸۷ \\ ۰.۶۱۰۴ \end{bmatrix}$$

منابع

[پینسکی]

[راس]

[زانلا]

[متئوس]

[ریبیرو]